612. 補助変數ヲ含ム線形微分方程式

福原　満洲雄（九大）

1. Trjitzinsky ノ研究ヲ本誌上ニ紹介シタノハ大分前ニナル（102号）、ソレノ続キトモ見ラルベキモノガ最近出タ、ソレハ

Trjitzinsky, Theory of linear differential equations containing a parameter (Acta Math., 67 (1936)).

デアル。ソレ等ヨリ以前彼ガ linear difference equations ニツイテ同様ナ問題ヲ論ジタモノガ二ツアル。コノ二ツト，最初ニ紹介シタ線形微分方程式ニ関スルモノト三ツヲ挙ゲタ後彼ハ言フ．

These three papers, just referred to together with the work at hand present a certain aspect of unity. These papers derive their significance from the fact that, when a class of analytic functions is at hand, the problem of central importance is to investigate the nature of functions in the vicinity of their singular points.

コレニ依ッテ彼ガハッキリシタ目標ヲ持ッテ進ンデ来タモノデアラウト想像サレル。ソノ目標ハ非常ニヨイト思フ。ソノ方法ハ決シテ巧妙ダトハ言ヘナイ。ソノ結果ニツイテハ，前回ノモノニ比較シテモ可ナリ見劣リガスル。大体今回ノ fundamental theorem ハピント来ナイ。叮寧ニ読マナイ方ガ悪イノデアルケレドモ，決定的ナ結果ニ達シテ居レバモット分リノヨイモノニナッテキル筈デアル。以下私ガ常用シテキル方法ニ依ッテ同ジ問題ヲ扱ッテミタ結果ヲ述ベヨウ。

2. 形式的解　最初カラ行列ヲ使ッテ與ヘラレタ方程式ヲ

$$(1)\quad Y' = A(x,\lambda)Y$$

ト書ク。$A(x,\lambda)$ ハ $\lambda\to\infty$ ノトキ漸近的ニ

$$A(x,\lambda)\sim\sum_{r=-\alpha}^{\infty}A_r(x)\lambda^{-r}$$

ナル形ニ展開サレルトスル。

$$Y = P(x,\lambda)Z$$

$$P(x,\lambda)\sim\sum_{r=-\mu}^{\infty}P_r(x)\lambda^{-\frac{r}{p}}$$

ナル置換ニ依ツテ (1) ガ

$$Z' = F(x, \lambda) Z$$

ニナッタトスレバ

$$F(x,\lambda) \sim \sum_{r=-\rho}^{\infty} F_r(x) \lambda^{-\frac{r}{\rho}}$$

ナル形式的ノ展開ヲ得ル. $P(x, \lambda)$ ヲ適當ニ選ベバ

$$F_r(x) = 0 \qquad (r = 1, 2, \cdots\cdots)$$

且ツ $F(x, \lambda)$ ハ對角行列デアルヤウニ出來ル。證明ハ補助変数ヲ含マナイ場合ト殆ンド平行ニ進メラレル。

$\lambda^{\frac{1}{\rho}}$ ヲ λ ト置換ヘルコトニヨリ何時デモ $\rho = 1$ トスルコトガ出來ル。ソコデ $F(x, \lambda)$ ハ對角行列, ソノ對角原素 $f_1(x, \lambda), \cdots\cdots, f_n(x, \lambda)$ ハ λ ノ整多項式トスル。$e^{\int f_i(x,\lambda)\,dx}$ ヲ對角原素トスル行列ヲ $Z(x, \lambda)$ ト書ケバ (1) ノ形式的解ハ

$$Y = P(x, \lambda) Z(x, \lambda) C(\lambda)$$

ト書ケル。$C(\lambda)$ ハ λ ノ任意函数デアル。

コノヤウニ形式的解ヲ求メルニハソノ解ヲ直接ニ求メヨウトスルヨリ, 豫メ適當ナ変数ノ置換ヲ行ッテ, 與ヘラレタ方程式ヲ出來ルダケ簡單ナ形ニ導イテ, ソレヲ積分シテ與ヘラレタ方程式ノ形式的解ヲ求メルトイフ方法ヲ取ル方ガ證明ガ組織立ッテ來ル、コノ事實ハ非線形微分方程式ニ関シテ同様ノ問題ヲ扱ッテ見ルト更ニ痛切ニ感ゼラレル。

3. 解析的解

與ヘラレタ方程式ヲ

(2) $Y' = (F(x,\lambda) + B(x,\lambda))Y$

$$B(x,\lambda) \sim \sum_{r=1}^{\infty} B_r(x)\lambda^{-r}$$

ナル形ニ導クコトガ出來ルコトモ補助変数ヲ含マナイ場合ト同様デアル。$F(x,\lambda)$ ハ前項ニ表ハレタモノト同一デアル。

(2) ガ

(3) $$y_j \sim \sum_{r=0}^{\infty} p_{jr}(x)\lambda^{-r} \qquad (j=1,2,\cdots\cdots,n)$$

ナル形式的ノ解ヲ持ツトシ，λ ハ或集合 D ノ中カラ ∞ ニ近ヅクモノトスル。更ニ

$$\Re f_j(x,\lambda) \geqq 0 \qquad (a \leqq x \leqq x_j, \quad \lambda \in D)$$

$$\Re f_j(x,\lambda) \leqq 0 \qquad (x_j \leqq x \leqq b, \quad \lambda \in D)$$

$$(j=1,2,\cdots\cdots,n)$$

ト假定スル。シカラバ，$a \leqq x \leqq b$，$\lambda \in D$，$\lambda \to \infty$ ノ時 (3) ナル漸近展開ヲ許ス (2) ノ解ガ存在スル。

$$y_j \sim e^{\int f(x,\lambda)dx} \sum q_{jr}(x)\lambda^{-r} \qquad (j=1,2,\cdots\cdots,n)$$

ナル形式的解ニ對シテハ

$$y_j = e^{\int f(x,\lambda)dx}\eta_j \qquad (j=1,2,\cdots\cdots,n)$$

ナル置換ヲ行ツテ $\eta_1,\cdots\cdots\cdots,\eta_n$ ニ関スル方程式ヲ考ヘレバヨイ。$f_j(x,\lambda)$ ニ對應スルモノハ $f_j(x,\lambda)-f(x,\lambda)$ デアル。

(2)ノ解ガ一ツ求マレバソレニλノ勝手ナ函数ヲ掛ケタモノモ(2)ノ解デアル。

コレガ Trjitzinsky ノ fundamental theorem ヨリヨイ結果ニナッテヰルト思フ。

証明ハ $\lambda\in D$, $\lambda\to\infty$ ノトキ

$$\varphi_j(\lambda)\sim\sum_{\nu=0}^{\infty}p_{j\nu}(x_j)\lambda^{-\nu}\qquad(j=1,2,\cdots\cdots,n)$$

ナル漸近展開ヲ許ス解析函数 $\varphi_j(\lambda)$ ヲ取リ（勿論ソノヤウナ函数ハ存在スル），$x=x_j$ ノトキ $y_j=\varphi_j(\lambda)$ トナル(2)ノ解ガ $a\leqq x\leqq b$, $\lambda\in D$, $\lambda\to\infty$ ノトキ (3) ナル形ニ漸近的ニ展開サレルコトヲ示スノデアル。ソノ際，解ノ存在及ビ単独性ニ関スル定理ガ利用サレルコトハ例ノ如シデアル。又ソノ解ノλニ関スル連続性，正則性ニ関シテハ補助変数ヲ含ム函数方程式ニ関スル定理ガ利用サレル。

Trjitzinsky ハ x ガ複素変数ノ場合ヲ述ベテ居ナイガ，存在定理，単独條件ニ基礎ヲ置ク証明法ナラバ x ガ複素変数ノ場合モ補助変数ヲ含マナイ線形微分方程式ト並行シテ理論ヲ進メルコトガ出来ル。